1 动手学线性代数

线性代数知识主要用于解决离散型矩阵形状的数据。python中用于线性代数矩阵处理的库主要是numpy。numpy官网还介绍了numpy包中各种函数与MATLAB相同操作的一一对应关系。

1.1 理论知识

1.1.1 线性方程组与向量

- 引入：鸡兔同笼问题，今有头共10只，脚共28只。问鸡兔各有几何？

- 分析：利用高中知识建立方程组，设有鸡、兔各x、y只。由题意得：

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+4y=28 \end{cases}$$

- 求解：由方程组得增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 28 \end{bmatrix}$$

经初等变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 28 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第二行}-\text{第一行}*2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第二行}/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第一行}-\text{第二行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

根据变换结果可知，$x=6, y=4$。

python代码

In [2]:
```
import numpy as np

A = np.array([[1, 1], [2, 4]])
b = np.array([[10], [28]])
x = np.linalg.solve(A, b)
print("方程组的解为：\n{}".format(x))
```

```
方程组的解为：
[[6.]
 [4.]]
```

1.1.2 向量空间、矩阵、行列式及范数

- 引入：对于刚才的题目，现又往里加入鸡鸭若干只，头变为14个，脚变为40只。问鸡、兔、鸭各几何？

- 分析：依然是建立方程组，设有鸡、兔、鸭各x、y、z只。由题意得：

$$\begin{cases} x+y+z=14 \\ 2x+4y+2z=40 \end{cases}$$

- 求解：由方程得增广矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 2 & 4 & 2 & 40 \end{bmatrix}$$

经初等变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 2 & 4 & 2 & 40 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第二行}/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 1 & 2 & 1 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第二行}-\text{第一行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第一行}-\text{第二行}} \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

根据变换结果知：$x+z=8, y=6$。这说明x, z具有多个解。

python代码

In [4]:
```
import numpy as np

A = np.array([[1, 1, 1], [2, 4, 2]])
b = np.array([[14], [40]])
# x = np.linalg.solve(A, b)   # 不能用solve方法，因为solve方法要求 A为方阵（满秩方阵
x = np.linalg.lstsq(A, b, rcond=None)     # lstsq方法返回的解是利用最小二乘法求解出
print("方程组的解为：\n{}".format(x))
```

```
方程组的解为：
(array([[4.],
       [6.],
       [4.]]), array([], dtype=float64), 2, array([5.16724093, 0.54737667]))
```

向量的运算法则

给定n维向量：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- 向量相加:两个相同维度得向量相加。

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ \cdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}$$

- 向量数乘：一个常数k乘以一个向量。

$$k\mathbf{x} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \\ \cdots \\ kx_n \end{bmatrix}$$

> 注（习惯）：默认所有的向量都采用列向量的形式。

In [5]:
```
import numpy as np

x = np.array([1, 2, 3])
y = np.array([4, 5, 6])
print("x={}, y={}".format(x, y))

# 向量加法
print("x+y={}".format(x+y))

# 向量数乘
k = 3
print("k*x={}".format(k*x))
```

```
x=[1 2 3], y=[4 5 6]
x+y=[5 7 9]
k*x=[3 6 9]
```

向量的线性相关与线性无关

- 定义：给定一组向量$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$，对于向量$\beta$，如果能被存在一组不全为0的常数$m_1, m_2, \cdots, m_k$，使得

$$\beta = m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_k\alpha_k$$

则称向量β与向量组$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$是线性相关的，或称$\beta$可以被向量组$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$线性表出。否则，则成为非线性相关。一旦向量是线性相关的，也就说明β是一个多余的向量，因为它可以由其他的向量去表示。

对与之前得矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 2 & 4 & 2 & 40 \end{bmatrix}$，可以将未知数系数组成的矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$看成一组向量，由于第一列和第三列线性相关，故方程又多个解，因此，通过判断方程系数矩阵各列（或各行）是否线性相关可以推断出方程是否有唯一解或多解。

- 引出：然而，如果当一个方程组未知数的量很大之后，你需要去判断哪些方程是"有效的"也是一件非常花时间的工作，有没有一个更好的方法呢，答案是有的，那就是行列式。

> 注：只有n维矩阵才有行列式。

In [6]:
```
import numpy as np

A = np.array([[1, 1, 1],
```

```
              [2, 4, 2],
              [2, 2, 2]])

np.linalg.det(A) # 计算方阵A的行列式
print("A的行列式的值为：",np.linalg.det(A))

B = np.array([[1,1,1,1],
              [1,2,0,0],
              [1,0,3,0],
              [1,0,0,4]])
B_det = np.linalg.det(B)
print("B的行列式的值为：",B_det)
```

```
A的行列式的值为： 0.0
B的行列式的值为： -2.0
```

> 判断方程是否有唯一解:
>
> - n个未知数要有n个方程
> - 使用线性无关去判断"有效的方程"
> - 系数行列式 $|A| \neq 0$,则这个方程组是有唯一解的(克莱姆法则)

- 对于方程的解，克拉姆法则提出了方程的解的结构： 设线性方程组的表达式为:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
，系数行列式为:
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \neq 0$$
，则该线性方程组有且仅有唯一解:
$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$
其中，$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

例子：解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$

解：方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27\neq 0$$

由克莱姆法则知：方程组有唯一解.

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81\Rightarrow x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{81}{27}=3$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108\Rightarrow x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-108}{27}=4$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27\Rightarrow x_3=\frac{D_3}{D}==\frac{-27}{27}=-1$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27\Rightarrow x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{27}{27}=1$$

python 代码

In [7]:
```
import numpy as np

D = np.array([[2.,1,-5,1],[1,-3,0,-6],[0,2,-1,2],[1,4,-7,6]])
D_det = np.linalg.det(D)
```

```
D1 = np.array([[8.,1,-5,1],[9,-3,0,-6],[-5,2,-1,2],[0,4,-7,6]])
D1_det = np.linalg.det(D1)

D2 = np.array([[2.,8,-5,1],[1,9,0,-6],[0,-5,-1,2],[1,0,-7,6]])
D2_det = np.linalg.det(D2)

D3 = np.array([[2.,1,8,1],[1,-3,9,-6],[0,2,-5,2],[1,4,0,6]])
D3_det = np.linalg.det(D3)

D4 = np.array([[2.,1,-5,8],[1,-3,0,9],[0,2,-1,-5],[1,4,-7,0]])
D4_det = np.linalg.det(D4)

x1 = D1_det / D_det
x2 = D2_det / D_det
x3 = D3_det / D_det
x4 = D4_det / D_det
print("克拉默法则解线性方程组的解为：\n x1={:.2f},\n x2={:.2f},\n x3={:.2f},\n x4={:
```

```
克拉默法则解线性方程组的解为：
 x1=3.00,
 x2=-4.00,
 x3=-1.00,
 x4=1.00
```

矩阵：矩阵不仅仅是用来解方程的

- 矩阵乘法：$A_{n\times m}B_{m\times k}=C_{n\times k}$

> 注：两矩阵相乘一定要注意两矩阵维度之间的对应关系。

In [13]:

```
import numpy as np

A = np.array([[1, 2, 3], [2, 3, 4]])
B = np.array([[2, 3, 4, 5], [4, 5, 6, 7], [2, 3, 4, 5]])
print("矩阵A的形状：{}".format(A.shape))
print(f"矩阵B的形状：{B.shape}")

print("AB=\n {}".format(np.matmul(A, B)))
# BA 会报错，因为维度不一致
```

```
矩阵A的形状：(2, 3)
矩阵B的形状：(3, 4)
AB=
 [[16 22 28 34]
 [24 33 42 51]]
```

- 矩阵加法：与向量加类似，两个维度相同的矩阵才可以进行相加操作。

In [14]:

```
import numpy as np

A = np.array([[1, 2, 3], [2, 3, 4]])
B = np.array([[2, 3, 4], [4, 5, 6]])

print("A + B=\n {}".format(np.add(A, B)))
```

```
A + B=
 [[ 3  5  7]
 [ 6  8 10]]
```

特殊矩阵

1. 单位矩阵：主对角线元素全为1，$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$。

1. 初等矩阵：经初等变换后的矩阵称为初等矩阵。

> 初等变换：
>
> - 对换变换：互换矩阵第i行（列）和第j行（列）的位置，记为$r_i \leftrightarrow r_j$（$c_i \leftrightarrow c_j$）。
> - 数乘变换：用一个非0常数k乘矩阵的第i行（列），记为$kr_i(kc_i)$。
> - 倍加变换：将矩阵第j行（列）的元素的k倍加到第i行（列），记为$r_i+kr_j(c_i+kc_j)$。

- 初等矩阵性质
  - 1. **交换第i个与第j个方程↔系数矩阵第i行与第j行互换↔左乘一个($P_{n\times n}$)，P为单位阵E_n第i行与第j行互换**
  - 1. **第i个方程左右乘非零常数k倍↔系数矩阵第i行乘k↔左乘一个($P_{n\times n}$)，P为单位阵E_n第i行乘k**
  - 1. **第i个方程加到第j个方程中↔系数矩阵第i行加到第j行↔左乘一个($P_{n \atop timesn}$)，P为单位阵E_n第i行加到第j行**

> 注：矩阵A左乘一个初等矩阵，表示对矩阵A做行变换；矩阵A右乘一个初等矩阵，表示对矩阵A做列变换

In [15]:
```
import numpy as np

print("单位矩阵：\n{}".format(np.eye(3)))

print('初等矩阵的性质：\n',"#"*50)

A = np.array([[1, 2, 3], [3, 4, 5], [3, 1, 2]])
print("矩阵A:\n{}".format(A))

P = np.array([[0, 1, 0], [1, 0, 0], [0, 0, 1]])
print("交换矩阵A第1行和第2行的位置：\n{}".format(np.matmul(P, A)))

P = np.array([[1, 0, 0], [0, 2, 0], [0, 0, 1]])
print("矩阵A的第2行元素乘以2：\n{}".format(np.matmul(P, A)))

P = np.array([[1, 0, 0], [0, 1, 0], [1, 0, 1]])
print("将矩阵A的第1行加到第3行：\n{}".format(np.matmul(P, A)))
```

```
单位矩阵：
[[1. 0. 0.]
 [0. 1. 0.]
 [0. 0. 1.]]
初等矩阵的性质：
 ##################################################
矩阵A:
[[1 2 3]
 [3 4 5]
 [3 1 2]]
交换矩阵A第1行和第2行的位置：
[[3 4 5]
 [1 2 3]
 [3 1 2]]
矩阵A的第2行元素乘以2：
[[ 1  2  3]
 [ 6  8 10]
 [ 3  1  2]]
将矩阵A的第1行加到第3行：
[[1 2 3]
 [3 4 5]
 [4 3 5]]
```

矩阵的逆

- 定义：对于n阶方阵A，如果存在一个n阶方阵B，使得

$$AB = BA = E_n$$

则称A是可逆的，B是A的逆矩阵，记做$B = A^{-1}$。

> 矩阵A可逆的充分必要条件：$|A| \neq 0$。

In [16]:

```python
import numpy as np

A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
print(np.linalg.det(A),"行列式不为0，非奇异阵") # 检验是否奇异
print("A的逆矩阵：\n", np.linalg.inv(A)) # 矩阵求逆

A_inv = np.linalg.inv(A)

print("验证AA_inv = E \n", np.matmul(A, A_inv))
```

```
-2.0000000000000004 行列式不为0，非奇异阵
A的逆矩阵：
 [[-2.   1. ]
 [ 1.5 -0.5]]
验证AA_inv = E
 [[1.0000000e+00 0.0000000e+00]
 [8.8817842e-16 1.0000000e+00]]
```

非奇异阵的伪逆

- 定义：对于任意一个矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$，存在一个矩阵$A^g \in \mathbb{R}^{m\times n}$，使得$AA^gA = A$，则称$A^g$为$A$的**伪逆**(广义逆)。

In [18]:

```python
import numpy as np
```

```
B = np.array([[1, 2], [2, 4]])
print("det(B): {}".format(np.linalg.det(B)))
if  np.linalg.det(B) == 0:
    print("矩阵B的逆不存在。")

pB_inv = np.linalg.pinv(B)
print("B的伪逆为: \n{}".format(pB_inv))
print("验证B*pB_inv*B?=B:\n")
print("B*pB_inv*B=\n{}.\nB=\n{}".format(np.matmul(B.dot(pB_inv), B), B))
```

```
det(B): 0.0
矩阵B的逆不存在。
B的伪逆为:
[[0.04 0.08]
 [0.08 0.16]]
验证B*pB_inv*B?=B:

B*pB_inv*B=
[[1. 2.]
 [2. 4.]].
B=
[[1 2]
 [2 4]]
```

1.1.3 对角化、矩阵的特征值与特征向量、正交化

- 引入：假设一个向量在坐标系1下表示的坐标为x，当这个向量x经过一个线性变换形成一个新的向量y，用矩阵表示这个变换就是：$y=Ax$，矩阵A对应着$x\rightarrow y$的线性变换. 同时，向量也可以在坐标系2下表示，其坐标为$x^{'}$，那么$x^{'}=Px$. 同理，$x^{'}$也可以经过同一个线性变换变成$y^{'}$，即：$y^{'}=Bx^{'}=BPx$. 最后我们把$y^{'}$转化为同一个坐标系下表达，即$y=P^{-1}y^{'}=P^{-1}BPx$. 因此，我们可以得到：$Ax=P^{-1}BPx$，即：

$$A=P^{-1}BP$$

  称满足上式的矩阵A、B称为相似矩阵. 总结：一个向量在空间位置里，选取不同的坐标系，其坐标值是不同的. 对于空间中同一个线性变换，在不同的坐标系下，用于描述这个变换的矩阵也是不同的, 而这些不同矩阵所描述的线性变换是相似的，因此称他们为**相似矩阵**.

- 相似矩阵的作用：一个矩阵代表着一个线性变换，而不同的坐标系又会得到不同的相似矩阵，那能不能选用一个最佳的坐标系，使得我们描述的这个线性变换的矩阵是最佳的呢？什么矩阵才能称得上是最佳矩阵呢？答案就是**对角矩阵**！因为当我们同时需要经历很多次线性变换的时候，对角矩阵能极大的减少我们的计算量，即：

$$A^n=\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}$$

  那给定一组基，怎么将这组基转化成最优的基，即**对角矩阵**对应的基呢？答案是利用矩阵的特征值和特征向量。

- 特征值和特征向量：设A是n阶矩阵，如果存在数λ和非0的n维向量p，使得：

$$Ap=\lambda p$$

则称数λ为矩阵A的一个**特征值**，非0向量p为A的对应于（或属于）特征值λ的**特征向量**。

> 注：特征向量可以在某个矩阵的变换下保持在同一直线上，但没有发生角度的偏转。

In [21]:
```
import numpy as np

A = np.array([[1, 2, 3], [4, 4, 5], [4, 2, 1]])
print("矩阵A：\n{}".format(A))

lamb, p = np.linalg.eig(A)
print("矩阵A的特征值为：\n{}".format(lamb))
print("矩阵A的特征向量为：\n{}".format(p))
print("矩阵A的对角化矩阵为：\n{}".format(np.matmul(np.linalg.inv(p), np.matmul(A, p)
# 将特别小的值过滤
res = np.matmul(np.linalg.inv(p), np.matmul(A, p))
res[np.abs(res) < 1e-6] = 0
print("矩阵A的对角化矩阵（过滤后）为：\n{}".format(res))
```

```
矩阵A：
[[1 2 3]
 [4 4 5]
 [4 2 1]]
矩阵A的特征值为：
[ 8.4986663  -2.40063774 -0.09802855]
矩阵A的特征向量为：
[[ 0.38817063  0.5319676   0.2964301 ]
 [ 0.81766508  0.28923706 -0.84117071]
 [ 0.42514396 -0.7958344   0.45228423]]
矩阵A的对角化矩阵为：
[[ 8.49866630e+00 -3.51961651e-15  1.37857939e-15]
 [ 4.39211080e-16 -2.40063774e+00  1.93632180e-16]
 [-8.35826809e-16 -1.55490979e-15 -9.80285522e-02]]
矩阵A的对角化矩阵（过滤后）为：
[[ 8.4986663   0.          0.        ]
 [ 0.         -2.40063774  0.        ]
 [ 0.          0.         -0.09802855]]
```

- 正交矩阵：如果满足以下等式的矩阵A称为正交矩阵：

$$A^TA = AA^T = E$$

通过上式可知：正交矩阵的逆矩阵与转置矩阵相同，即：$A^{-1} = A^T$，因为：$A^{-1}A = E$。

> 正交矩阵的作用：令一个向量进行旋转变换或者镜像变换。

> 正交矩阵规律：
>
> - 正交矩阵的各行是单位向量且两两正交（垂直），或者说正交矩阵的各列是单位向量且两两正交（垂直）。
> - $\alpha_i \cdot \alpha_i^T = 1$，也就是说$\alpha_i$是单位向量（$\alpha_i$ 为正交矩阵的行向量）。
> - $\alpha_i \cdot \alpha_j^T = 0 \quad (i \neq j)$，向量之间两两正交。
> - 对于正交矩阵A，$|A| = \pm 1$

给定一组基，怎么将其变成标准正交基？答案是利用施密特正交化。

原理：随便找一个原向量，把它固定住，接着找来第二个向量，往上面做投影，剩下的垂直分量就是第二个正交基，……重复的做下去，直到所有基都变换过一遍后，得到的这组新的基就是正交基. 更进一步，如果我们把所有基进行标准化，使得每个基自己与自己做内积都为1，即模长为1，则得到的是一组标准正交基。

python代码

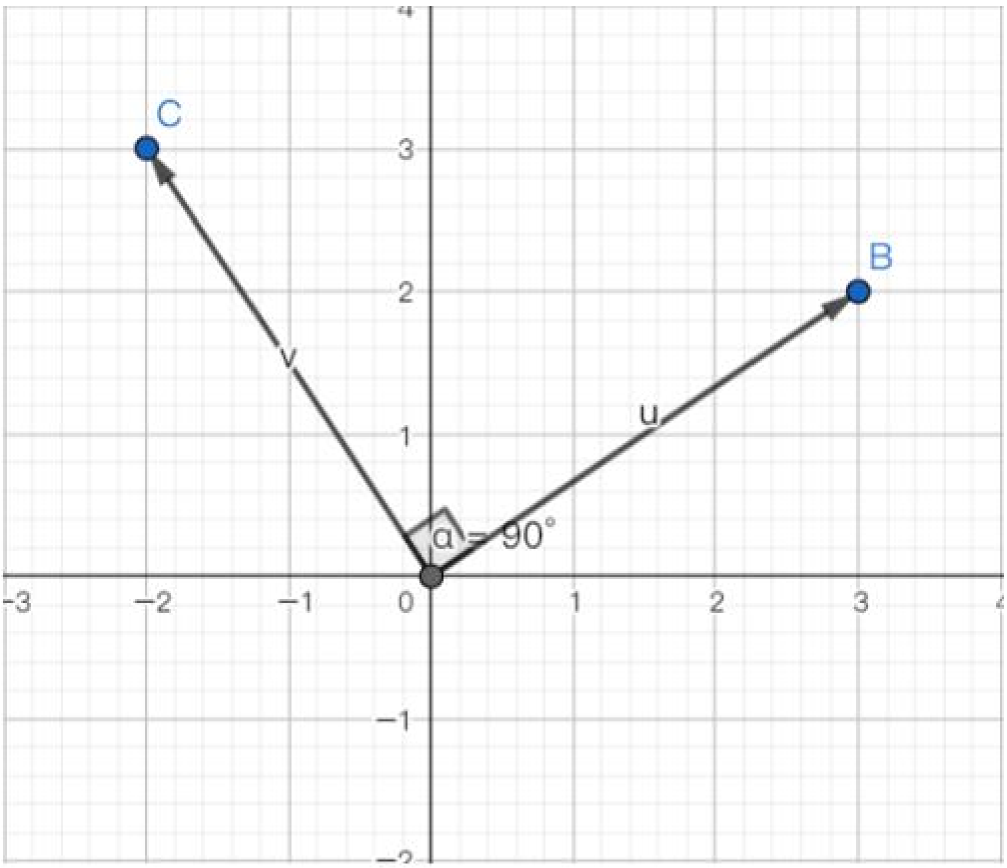
In [27]:
```
import numpy as np
import scipy

A = np.array([[2, 4, 5],
              [4, 5, 6],
              [5, 8 , 9]])

B = scipy.linalg.orth(A)     # 正交化
print("B*B.T=\n{}".format(np.matmul(B, np.transpose(B))))

res = np.matmul(B, np.transpose(B))
res[np.abs(res) < 1e-6] = 0
print(res)
```

```
B*B.T=
[[ 1.00000000e+00 -5.39825374e-16  4.27489209e-16]
 [-5.39825374e-16  1.00000000e+00 -1.17069301e-16]
 [ 4.27489209e-16 -1.17069301e-16  1.00000000e+00]]
[[1. 0. 0.]
 [0. 1. 0.]
 [0. 0. 1.]]
```

1.2 实战：基于矩阵变换的图像变换

- 任务：将下面的图片旋转为便于正常人观看的的位置。

- 原理：设图像中某一点(x,y)经旋转之后变为点$(x^{'},y^{'})$, 只需要找出原点(x,y)和变换之后点$(x^{'},y^{'})$之间的关系即可实现图像的旋转。



建立如上图所示的坐标轴，其中点$B=(x,y)$为原点，点$C=(x^{'},y^{'})$为点B经旋转角度α之后的点，点B与横坐标轴的夹角为θ，点B到原点的距离为r。

由上图可知,对于点B:

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$$

点B经旋转角度α到点C之后，对于点C：

$$\begin{cases} x^{'} = rcos(\theta + \alpha) = r[cos\theta cos\alpha - sin\theta sin\alpha] = xcos\alpha - ysin\alpha \\ y^{'} = rsin(\theta + \alpha) = r[sin\theta cos\alpha + cos\theta sin\alpha] = ycos\alpha + xsin\alpha \end{cases}$$

> 三角函数公式
>
> - $cos(\alpha + \beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$
> - $sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$

因此，可得变换矩阵：

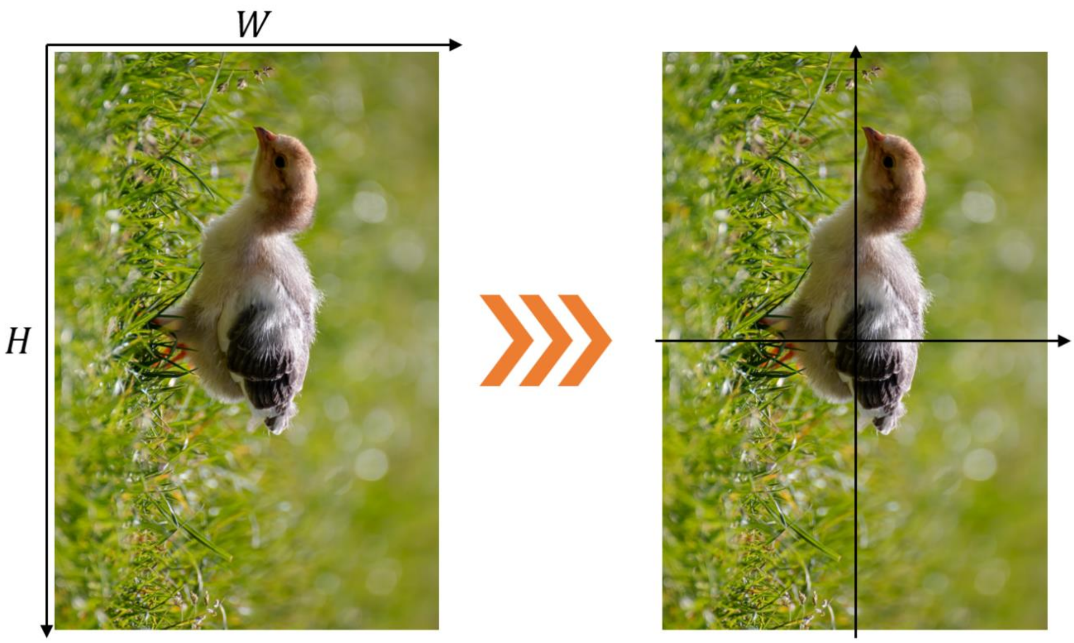
$$[x^{'}, y^{'}] = [x, y]\begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$$

python实现

In [33]:
```
import numpy as np
from math import *

def point_rotate(x, y, alpha):
    Trans = np.array([[cos(alpha), sin(alpha)],
                      [-sin(alpha), cos(alpha)]])
    temp = np.array([x, y])
    res = np.matmul(temp, Trans)
    return res

res = point_rotate(3, 2, pi/2)
print(res)
```

```
[-2.  3.]
```

注意：但如果这样的话，会出现一个问题，对于一张图片而言，旋转中心在左上角，导致整张图片旋转不是中心旋转的. 下面我们需要对坐标轴进行平移，完善我们的变换公式。



假设图片宽度为W，高度为H，则在第一个坐标系下(左图)的坐标(x', y')，变换之后的坐标为(x'', y'')，则

$$x'' = x' - \frac{1}{2}W$$
$$y'' = -y' + \frac{1}{2}H$$

则转换矩阵变为：

$$[x^{''}, y^{''}, 1] = [x^{'}, y^{'}]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2}W & \frac{1}{2}H & 1 \end{bmatrix}$$

记

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2}W & \frac{1}{2}H & 1 \end{bmatrix}$$

则：

$$[x^{'}, y^{'}] = [x^{''}, y^{''}, 1]B^{-1}$$

对于之前的变换$[x^{'}, y^{'}] = [x, y]\begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$需要做进一步的修改，以使其满足矩阵运算的维度要求。具体变换如下：

$$[x^{'}, y^{'}, 1] = [x, y, 1]\begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha & 0 \\ -sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

记

$$C = \begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha & 0 \\ -sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最后将图像上的一点旋转到一定位置需要经过以下步骤：

- 将图像坐标$(x^{'}, y^{'})$转换为标准坐标:$[x^{'}, y^{'}, 1]B$
- 将转换的标准坐标进行旋转：$[x^{'}, y^{'}, 1]BC$
- 将旋转后的标准坐标转换回图像坐标：$[x^{'}, y^{'}, 1]BCB^{-1}$

得到转换图像坐标的矩阵变换：

$$= [x', y', 1]BCB^{-1}$$

$$= [x', y', 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2}W & \frac{1}{2}H & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos\alpha & sin\alpha & 0 \\ -sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2}W & \frac{1}{2}H & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [x', y', 1]\begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ -0.5Wcos\alpha - 0.5Hsin\alpha - 0.5W & 0.5Wsin\alpha - 0.5Hcos\alpha + 0.5H & 1 \end{bmatrix}$$

python代码实现

In [41]:

```
import numpy as np
from math import *
from PIL import Image
img = Image.open('figures/chiken.jpg')
print(img.size)
img
```

(250, 376)

Out[41]:

In [64]:

```
def point_rotate(x0, y0, W, H, alpha):
    trans = np.array([[cos(alpha), -sin(alpha), 0],
                      [sin(alpha), cos(alpha), 0],
                      [-0.5*W*cos(alpha)-0.5*H*sin(alpha)-0.5*W, 0.5*W*sin(alpha)-
    temp = np.array([x0, y0, 1])
    res = np.matmul(temp, trans)
    return (int(res[0]), int(res[1]))


def image_rotate(image, alpha):
    (H, W, C) = image.shape
    img = np.zeros((max(W, H), max(W, H), C))
    for k in range(C):
        for i in range(W):
            for j in range(H):
                (x1, y1) = point_rotate(i, j, W, H, alpha)
                img[y1, x1, k] = image[j, i, k]
    return img
```

```
a = np.array(img)
res = image_rotate(a, pi/2)
b = Image.fromarray(np.uint8(res))
b
```

Out[64]: